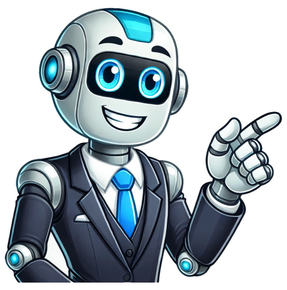
Continue



Integrales por cambio de variable ejercicios resueltos

En esta página explicamos el método de integración por sustitución o cambio de variable a través de 4 ejemplos. Como es de suponer por su nombre, el método de sustitución consiste en aplicar un cambio de variable para transformar el integrando en una función más simple de integrar. Notación: escribiremos la función logaritmo natural (logaritmo en base \(e\)) como \(ln(·)\). El método Explicaremos el método mediante ejemplos, pero el esquema es el siguiente (si resulta demasiado técnico, podéis dejarlo pasar). Dada la integral indefinida $$\int{ f(x) dx }$$ 1. Definimos un cambio de variable \(s = h(x)\). 2. Calculamos la inversa del cambio de variable, es decir, \(x = h^{-1}(s)\), y la derivamos: $$ dx = \frac{1}{h'(s)} ds $$ 3. Aplicamos el cambio en la integral: $$ \int{ f(x) dx } = $$ $$ = \int{ f(h^{-1}(s))\cdot \frac{1}{h'(s)} ds }$$ 4. Resolvemos la integral obtenida. 5. Para terminar, deshacemos el cambio de variable (escribimos la primitiva en función de \(x\) en lugar de \(s\)). Como se observa en los ejemplos que veremos, la elección del cambio de variable es la clave para que el método funcione. En la siguiente tabla se recogen los cambios que habitualmente suelen funcionar: Tabla con cambios útiles Nota previa: algunas de las integrales que resolvemos son directas o se pueden resolver mediante otros métodos. Solución: Aplicaremos el cambio de variable Escogemos este cambio porque así, al sustituir en la integral, la raíz cuadrada desaparece. Calculamos la inversa del cambio de variable y derivamos: Sustituimos en la integral (cambiamos \(x\) por \(s^2-1\) y \(dx\) por \(2sds\)): Operamos en el integrando para simplificarlo: Resolvemos la integral: Simplificamos un poco el resultado: Deshacemos el cambio de variable: Como \(s = \sqrt{x+1}\), Por tanto, Nota final: normalmente, para eliminar una raíz cuadrada elegimos el cambio \(s =\) (radicando)\(^2\). Solución: Como se indica en la tabla, cuando tenemos exponenciales aplicamos el cambio \(s = e^x\). Despejamos \(x\) y derivamos: Aplicamos el cambio de variable (escribiendo directamente \(s\) en lugar de \(e^x\) y \(1/s ds\) en lugar de \(dx\)): Simplificamos y resolvemos la integral: Las dos integrales que tenemos son, más o menos, directas: Por tanto, tenemos Deshacemos el cambio de variable: Con lo que la integral inicial es Solución: Tanto el exponente del seno como el del coseno son impares, así que, según la tabla, podemos aplicar el cambio \(s = cos(x)\) o el cambio \(s = sin(x)\). Nos decidimos por el primero: \(s = cos(x)\). Despejamos \(x\) y derivamos: Calculamos el cubo del seno en la nueva variable: Aplicamos el cambio de variable: Simplificamos (las raíces van a desaparecer): Calculamos la integral obtenida: Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Para simplificar el resultado de la siguiente integral, utilizaremos Nota: la resolución de la integral es sencilla, pero bastante larga. Solución: Teniendo en cuenta la tabla, aplicamos el cambio Nota: en los otros casos, la tabla nos proporciona la nueva variable \(s\) en función de \(x\). En este caso, es la inversa. Derivamos: Calculamos \(s\): Sustituimos en la integral: Simplificamos el integrando y resolvemos la integral: Finalmente, deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Nota: utilizando fórmulas, el resultado puede simplicarse bastante, pero omitimos este cálculo por su irrelevancia en el método de integración. Más integrales por sustitución: 10 integrales resueltas por cambio de variable. La integración por cambio de variable es un método fundamental en el cálculo integral que permite simplificar la resolución de integrales complejas. Utilizando la técnica de integración por sustitución, podemos reformular una integral complicada en una forma más manejable, facilitando su solución. Los ejercicios presentan integrales de diversos tipos, desde cocientes de exponenciales hasta funciones trigonométricas, y abarcan diversas técnicas como la descomposición en fracciones simples y la aplicación de identidades trigonométricas. Al final de este recorrido, tendrás una comprensión más clara sobre cómo integrar por cambio de variable y cómo aplicar estos principios en tus propias prácticas de resolución de integrales. Vamos a adentrarnos en esta metodología clave del cálculo. ¿Qué es la integración por cambio de variable? La integración por cambio de variable, también conocida como integración por sustitución, es un método que transforma una integral original en una nueva integral a través de la sustitución de variables. La idea fundamental es facilitar la resolución de la integral al cambiarla a una forma en la que sea más fácil trabajar. Al elegir una correcta sustitución, podemos simplificar el integrando, haciéndolo más manejable. Este método es particularmente útil cuando el integrando contiene funciones compuestas o productos de funciones, donde la derivación de la función interna puede simplificar nuestras operaciones. Además, al emplear el método de sustitución integrales, podemos aplicar lo que ya conocemos sobre la integral de funciones más simples y así llegar a la solución deseada sin complicaciones. Importancia del método de sustitución El método de sustitución es crucial en el cálculo integral porque permite resolver integrales que, de otro modo, podrían ser extremadamente difíciles o incluso imposibles de abordar. Al simplificar el integrando a través de una variable diferente, se abre la puerta a una resolución más directa, aprovechando propiedades matemáticas que podemos aplicar a funciones más familiares. Asimismo, las integrales por sustitución son ampliamente aplicadas en diversas áreas del conocimiento, incluida la física, la ingeniería y la economía, donde los modelos matemáticos a menudo requieren la resolución de integrales complejas. Por ello, dominar este método se convierte en una herramienta esencial para cualquier estudiante o profesional que trabaje con matemáticas aplicadas. Consideraciones previas antes de resolver integrales Elegir correctamente la variable de sustitución: La variable que elijas debe simplificar el integrando y facilitar el proceso de integración. Calcular la derivada: La derivada de la variable de sustitución es crucial para transformar el diferencial de la integral. Definir los límites de integración: Si trabajas con integrales definidas, no olvides ajustar los límites según tu cambio de variable. Ejercicio 1: Integral de un cociente de exponenciales Resolvamos la integral: ∫ (e^x)/(e^x + 1) dx «Sustitución:» Se elige u = e^x + 1, entonces du = e^x dx. Sustituyendo, tenemos: ∫ (1/u) du = ln|u| + C = ln|e^x + 1| + C Ejercicio 2: Integral con función logarítmica Resolvamos la integral: ∫ ln(x) dx «Sustitución:» Se elige u = ln(x), por lo que dx = e^u du. Entonces: ∫ u e^u du Utilizamos integración por partes donde letiante u = u y dv = e^u du: u e^u – ∫ e^u du = u e^u – e^u + C Regresando a la variable original: ln(x)e^(ln(x)) – e^(ln(x)) + C = ln(x)x – x + C Ejercicio 3: Integral que involucra raíces cuadradas Consideremos la integral: ∫ √(x^2 – 1) dx «Sustitución:» Se elige u = x – √(x^2 – 1), derivando y simplificando: 2u du = 2 * (x dx), así podemos resolver la integral por sustitución. Ejercicio 4: Integral de una función trigonométrica Considera la integral: ∫ cos^2(x) dx «Sustitución:» Se aplica la identidad trigonométrica: cos^2(x) = (1 + cos(2x))/2. ∫ (1/2)(1 + cos(2x)) dx El resultado es (1/2)(x + (1/2)sin(2x)) + C. Ejercicio 5: Integración de polinomios utilizando cambio de variable Resolvamos: ∫ (x^3 + 4x^2) dx «Sustitución directa:» La integral es simplificada directamente: (1/4)x^4 + (4/3)x^3 + C Ejercicio 6: Aplicación de identidades trigonométricas en la integral Resolviendo la integral: ∫ sin^3(x) cos^2(x) dx «Sustitución:» Se utiliza u = sin(x), así du = cos(x)dx: ∫ u^3(1 – u^2) du = ∫ (u^3 – u^5) du = (1/4)u^4 – (1/6)u^6 + C Ejercicio 7: Integral que requiere descomposición en fracciones simples Trabajo con la integral: ∫ (2x + 3)/(x^2 + 5x + 6) dx «Descomposición:» Se descompone y se aplica la sustitución. Resultado: ln|polinomio| + C Ejercicio 8: Integral con límite de integración Considera: ∫^0_1 (x^3 + 4) dx «Sustitución:» Se integra normalmente y cambia de límites al aplicar. [1/4]*x^4 + 4x | del 1 al 0 = valor específico Ejercicio 9: Cambio de variable en integrales impropias Resolvemos: ∫^∞_0 e^(-x^2) dx «Sustitución:» Se utiliza u = x^2, simplificando los límites y la integral. Ejercicio 10: Integración por partes junto a sustitución Se plantea: ∫ x e^x dx Utilizamos la sustitución y luego integración por partes, resultando: Resultante en términos de e^x. Ejercicio 11: Uso de sustitución trigonométrica Por ejemplo: ∫ (1)/(1 + x^2) dx «Sustitución:» u = tan^(-1)(x), dando solución con la identidad trigonométrica. Ejercicio 12: Integral de una función racional Considerando: ∫ (x + 1)/(x^2 + x) dx «Sustitución:» La simplificación permite fraccionar y resolver fácilmente. Ejercicio 13: Transformación de variables en integrales definidas Se plantea: ∫^2_0 (x^2 + 1) dx «Sustitución:» Permite ajustar y calcular límites variados una vez resuelto. Ejercicio 14: Resolviendo integrales complejas Analizando: ∫ (sin^3(x) + 2cos^2(x)) dx «Sustitución:» La combinación de identidades facilita el procesamiento. Ejercicio 15: Práctica adicional con funciones compuestas Pondamos a prueba: ∫ (e^(2x) + 1) dx Resultado usando la adecuada variable y derivada. Ejercicio 16: Introducción a cambios de variable en múltiples dimensiones Estudiamos: ∬ e^(x + y) dy dx Sustitución avanzada a múltiples variables para un resultado. Ejercicio 17: Resumen de estrategias de integración Revisando los diferentes métodos utilizados hasta ahora, queda claro como la integración por cambio de variable facilita la resolución: Recapitulación de técnicas y ejemplos. Conclusiones y recomendaciones para practicar La práctica es esencial para dominar el método de integración por sustitución. Trabajar con variedad de problemas y situaciones es clave para familiarizarte con el cambio de variable en integrales. Te animamos a resolver los ejercicios de integrales por sustitución y experimentar con diferentes tipos de integrales. Recursos adicionales para profundizar en la integración por cambio de variable Para aquellos que desean profundizar en el tema, es recomendable consultar: Textos de cálculo integral que aborden la integración por cambio de variable. Foros en línea y comunidades de matemáticas donde se discuten consejos y trucos sobre integrales por sustitución. Videos explicativos y tutoriales en plataformas educativas que permitan visualizar el proceso de integración por sustitución. La integración por cambio de variable es una herramienta poderosa que amplifica nuestra capacidad para resolver integrales, y dominarla abrirá una nueva dimensión en tu comprensión del cálculo integral. A continuación te voy a enseñar cómo integrar por el método de sustitución o de cambio de variable, con ejercicios resueltos paso por paso. Si has llegado hasta aquí es porque seguramente hay algún ejercicio que no sabes resolver y necesitas clases de matemáticas online. Si después de leer esto, quieres que te ayude a resolverlo o que te despeje alguna duda, puedes hacer dos cosas: o seguir buscando por Internet o contactar conmigo e ir directo al grano y ahorrarte tiempo. Lo que vas a leer es tan sólo un ejemplo de lo que puedo enseñarte con mi método para enseñar matemáticas. Puedo explicarte paso a paso cualquier duda que no entiendas: QUIERO APRENDER MATEMÁTICAS Sólo tienes que dejarte guiar por mí verás como tu nota y tu tiempo libre subirán como la espuma. Cómo resolver integrales por sustitución Las integrales que se resuelven por el método de sustitución o cambio de variable no siguen ninguna metodología establecida. Se realiza un cambio de variable para simplificar la integral y facilitar su resolución, que generalmente llamaremos t. Se resuelve la nueva integral en función de la nueva variable t y una vez resuelta, se vuelve a cambiar la variable t por su expresión en función de la variable x. Una buena forma de aprender a resolver integrales por sustitución es practicando, lo que hará que deduzcas antes cuál es el cambio de variable a realizar, por haber realizado otra integral similar. Ejercicios resueltos de integrales por sustitución Vamos a resolver unas cuantas integrales por sustitución paso por paso Integral por sustitución 1 En general, cuando tengamos una raíz en una integral, realizamos el cambio de variable con el contenido de la raíz o bien toda la raíz. En este caso, el cambio de variable es: de donde podemos despejar la x: Y en esta última expresión derivamos en ambos miembros: (el cambio t=x-1 también es posible) Como ves, una vez hecho el cambio de variable, tenemos que buscar la forma para poder poner todos los factores que aparecen en la integral en función de la nueva variable. Ahora sustituimos los factores de la integral por los nuevos factores en función de x: Operamos y sacamos fuera la constante: Integramos aplicando el método de integrales inmediatas: Operamos para eliminar el paréntesis: Y finalmente, volvemos a cambiar la variable «t» por su expresión en función de x y le añadimos la constante: Integral por sustitución 2 En este caso, la nueva variable es igual a e elevado a -x: En esta expresión, derivamos en ambos miembros: Para poder sustituir dt en la integral, necesitamos un signo menos, que se lo añadimos y se lo quitamos: Sustituimos todos los factores por los nuevos en función de «t»: Integramos por medio de integrales inmediatas: Volvemos a sustituir la t por su expresión en función de x y le añadimos la constante: Integral por sustitución 3 En este caso, la nueva variable será igual al contenido de la raíz: Y en esta expresión derivamos en ambos miembros: Para poder sustituir dt en la integral necesitamos un -9, que se lo añadimos y se lo quitamos: Sustituimos todas las variables en función de x por su correspondiente expresión en función de t y ponemos la raíz en su forma exponencial: Integramos aplicando integrales inmediatas y volvemos a dejar el resultado en forma de raíz: Finalmente, volvemos a sustituir la «t» por su expresión en función de x: Integral por sustitución 4 Sacamos la constante fuera de la integral: Ahora realizamos el cambio de variable. La nueva variable es igual a e elevado a x: Derivamos en ambos miembros: Para poder sustituir dt en la integral, necesitamos un signo menos, nos falta un e elevado a x, por lo que se lo añadimos al numerador y para no alterar la función, lo añadimos también en el denominador: Sustituimos todas las variables en función de x por su correspondiente expresión en función de t: Nos ha quedado una integral racional con raíces reales distintas en el denominador, que pasamos a resolver. Descomponemos la función racional en una suma de fracciones simples: Sustituimos la función racional de la integral por la suma de fracciones simples: Operamos: Resolvemos la integral: Una vez resuelta la integral, sustituimos t por su expresión en función de x (deshacemos el cambio de variable): Y por último, operamos en el primer término y añadimos la constante: Integral de la raíz de e elevado a x menos 1 La resolución de la integral de la raíz de e elevado a x menos 1 es bastante compleja ya que no es nada intuitiva. Empezamos realizando el cambio de variable igual a la raíz de e elevado a x menos 1 (la dejo en azul porque la necesitaremos más adelante): De esta expresión podemos despejar e elevado a x: Por otro lado, en la primera expresión derivamos en ambos miembros: Nos ha quedado una expresión en la que volvemos a tener la raíz de e elevado a x menos 1 y además tenemos otro e elevado a x. Ambos los podemos sustituir en función de t, gracias a las dos expresiones anteriores: Y de esta última ecuación, podemos despejar dx para tenerlo en función de t (que también la dejo en azul): Con las expresiones que tenemos para expresar la raíz de e elevado a x menos 1 y dx en función de t (ambas en color azul), realizamos la sustitución en nuestra integral: Sacamos fuera la constante y operamos: Vemos que el denominador es perfecto para aplicar la fórmula de la integral inmediata del arco tangente, pero no así el numerador. No obstante, si en el numerador sumamos 1 y lo volvemos a restar para no alterar el resultado de la función: Podemos separar la integral en dos nuevas integrales: Una de las cuales el numerador y el denominador se anula y la otra queda preparada para resolverla con la fórmula de la integral inmediata del arco tangente: Integramos: Operamos para eliminar el paréntesis: Y finalmente volvemos a sustituir la «t» por su expresión en función de x y le añadimos la constante: Ejercicios propuestos Resuelve las siguientes integrales: ¿Necesitas ayuda con las matemáticas? ¿Quieres que te explique paso a paso cualquier duda que te surja? Puedo enseñarte exactamente lo que necesitas aprender para aprobar las matemáticas. He diseñado un método práctico y efectivo que te ayudará a entender las matemáticas, paso a paso, explicándote justo lo que necesitas para saber resolver todos tus ejercicios y problemas. Todo con un lenguaje sencillo y ameno que entenderás perfectamente. Con mi método: Sabrás los pasos exactos que tienes que dar para resolver tus ejercicios y problemas Conseguirás resultados en muy poco tiempo, sin dedicar más horas a intentar entenderlo por tu cuenta sin llegar a ninguna conclusión Suena bien ¿no? ¿Por qué tardar 2 horas buscando por Internet si puedes aprenderlo en menos de 20 minutos? Sé lo que te impide entender las matemáticas y sé lo que necesitas para entenderlas. ¿Quieres informarte de como puedes aprender matemáticas conmigo? Pulsa el botón para saber más: ENSÉÑAME MATEMÁTICAS ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (ABAU) de Galicia para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EvAU) de Castilla-La Mancha para descargar? Descárgate aquí los exámenes de ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EBAU) de Canarias para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EBAU) de Extremadura para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (PBAU) de Baleares para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EBAU) de La Rioja para descargar? Descárgate aquí los exámenes de ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EvAU) de Navarra para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... ¿Estás buscando exámenes resueltos de Matemáticas II de selectividad (EBAU) de Cantabria para descargar? Descárgate aquí los exámenes de los ... Integration by substitution is an important method of integration, which is used when a function to be integrated, is either a complex function or if the direct integration of the function is not feasible. The integral of a function is simplified by this method of integration by substitution, by reducing the given function into a simplified function. Let us learn the process of integration by substitutions, check some of the important substitutions, and also check the solved examples. What Is Integration by Substitution? Integration by substitution is used when the integration of the given function cannot be obtained directly, as the given algebraic function is not in the standard form. Further, the given function can be reduced to the standard form by appropriate substitution. Let us consider the indefinite integral of a function f(x), \(\int f(x).dx\). Here this integral can be transformed to another form by replacing x with g(t) and by substituting x = g(t). I = \(\int f(x).dx\) x = g(t) such that dx/dt = g'(t) dx = g'(t).dt I =\(\int f(x).dx = \int f(g(t)).g'(t).dt\) Steps to Integration by Substitution The following are the steps that are helpful in performing this method of integration by substitution. Step - 1: Choose a new variable t for the given function to be reduced. Step - 2: Determine the value of dx, of the given integral, where f(x) is integrated with respect to x. Step - 3: Make the required substitution in the function f(x), and the new value dx. Step - 4: Integrate the function obtained after substitution Step - 5: Substitute back the initial variable x to obtain the final answer. Important Substituions in Integration by Substitution The following are some of the important substitutions which are helpful in simplifying the given expression and easily performing the integration process. Let us check the following specific substitutions for integration by substitution. For the integral function \(f(\sqrt{a^2 - x^2})\) we use x = aSinθ or x = aCosθ. For the integral of the function \(f(\sqrt {x^2 - a^2})\) we use x = a Secθ or x = aCosecθ. For the integral of the function \(f(x^2 + a^2)\). \(f(\sqrt{x^2 + a^2})\) we use x = aTanθ, or x = aCotθ. For the integral of the functions \(f(\sqrt {\dfrac{a - x}{a + x}})\) , \(f(\sqrt {\dfrac{a + x}{a - x}})\), we use x = a Cos2θ. Related Topics The following topics help in a better understanding of this concept of integration by substitution. Examples on Integration by Substitution Example 1: Find the integral of \(\dfrac {e^{Tan^{-1}x}}{1 + x^2}\). Solution: The given expression for integration is \(\int \dfrac {e^{Tan^{-1}x}}{1 + x^2}.dx\) Here let us take \(Tan^{-1}x = t\), and we can differentiate it further. \(\dfrac{d}{dx}.Tan^{-1}x = \dfrac{d}{dx}.t\) \(\dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{dt}{dx}\) \(dx =(1 + x^2).dt\) Let us now substitute the 't' value and dx value in the given expression for integration. \(\int \dfrac {e^{Tan^{-1}x}}{1 + x^2}.dx = \int \dfrac{e^t}{1+ x^2}.(1 + x^2).dt\) = \(\int e^t.dt\) = \(e^t + C\) = \(e^{Tan^{-1}x} + C\) Therefore, the integration of \(\dfrac {e^{Tan^{-1}x}}{1 + x^2}\) is \(e^{Tan^{-1}x} + C\). Example 2: Find the integral of \(2xSec^2(x^2 + 1)\). Solution: The given expression for integration is \(\int 2xSec^2(x^2 + 1).dx\). Here we substitute \(x^2 + 1 = t\) and differentiate it further. \(\dfrac{d}{dx}.(x^2 + 1) = \dfrac{d}{dx}.t\) 2x = dt/dx dx = dt/2x Let us now substitute t and dx value in the above expression of integration. \(\int.2xSec^2(x^2 + 1).dx = \int 2xSec^2t.\dfrac{dt}{2x}\) =\(\int Sec^2t.dt\) = Tant + c = Tan(x2 + 1) + C Therefore the integration of \(\int 2xSec^2(x^2 + 1).dx\) is Tan(x2 + 1) + C. View Answer > go to slidego to slide Have questions on basic mathematical concepts? Become a problem-solving champ using logic, not rules. Learn the why behind math with our certified experts Book a Free Trial Class FAQs on Integration by Substitution Integration by substitution is an important method of integration, which is used when a function to be integrated, is either a complex function or if the direct integration of the function is not feasible. How Do You Integrate by Substitution? Integration by substitution can be performed through a set of sequential steps. First, choose a new variable for the part of the function to be substituted. Secondly, determine the value of differentiation of x, ie dx from this new variable substitution. The third steps involve the process of integration involving this new variable. Finally, substitute back the initial variable to obtain the final answer. How Do You Know When To Use Integration by Substitution? The process of integration by substitution is used if the given function to be integrated has one of the following three characteristics. The given function has a sub-function. The function to be integrated is a complex number-based function. The direct integration of the function is not possible. What Is the Formula For Integration by Substitution? There is no defined formula for integration by substitution. Based on the given function, the part of the function which is to be substituted is substituted with a new variable. How Do You Use Integration By Substitution for Trigonometric Formulas? The integration by substitution is used for trigonometric functions, similar to any other function. Here the trigonometric function is replaced with a new variable, to transform it into an algebraic expression, which is easy to integrate. We can use integration by substitution to undo differentiation that has been done using the chain rule. It gives us a way to turn some complicated, scary-looking integrals into ones that are easy to deal with. To use this technique, we need to be able to write our integral in the form shown below: Do you notice how the \(g(x)\) inside the blue brackets matches up with the \(g'(x)\) outside the blue brackets? Here's a real-life example: In the above example, \(f = \sin\) and \(g(x) = x^2\). The derivative \(g'(x) = 2x\) is precisely what appears at the end of the integrand. So, this example is in good shape and ready for us to apply our brand new, fancy-shmancy integration technique. So, what do we do now? I'm glad you asked. We do our substitution. Replace \(g(x)\) by \(u\) and \(g'(x)\;dx\) by \(du\) just as in the image below: Because we most often substitute a \(u\) for \(g(x)\), integration by substitution is sometimes called "u-substitution". (I've actually only ever seen this in an American book). Of course, we could also substitute in a penguin for \(g(x)\), and then call it "penguin-substitution"... but I think it's probably easiest to simply call it "substitution". The next step is to integrate the (hopefully simpler) function \(f(u)\) with respect to \(u\). Once that is done we have do another substitution - we plug the expression for \(g(x)\) into our antiderivative whereever we see \(u\). So, here's a question for you... why don't the Americans call it \(g(x)\)-substitution? Now it's time to put our theory into practice. Let's see if we can integrate our real-life example. Example Find \(\displaystyle{\int \sin(x^2)2x\;dx}.\) This one is nicely set up for substitution: So now we can integrate \(\displaystyle{\int \sin(u)\;du = - \cos(u) + C}.\) Finally plug \(u = x^2\) back in to give: \(\displaystyle{\int \sin(x^2)2x\;dx = - \cos(x^2) + C}.\) Now let's try some slightly harder examples - ones that aren't quite so nicely set up for substitution. Example Find \(\displaystyle{\int \sin(x^2)8x\;dx}.\) This integrand wasn't quite so thoughtful in the way it expressed itself. If we set \(u = x^2\), then its derivative is \(2x\). But we have \(8x\). There's no need to panic. The rules of integration get us out of trouble here. All you need to do is pull a 4 out the front of the integral, like this: \(\displaystyle{\int \sin(x^2)8x\;dx = 4 \int \sin(x^2) 2x\; dx}.\) If you're not sure why this is OK, check out the "multiplication by a constant" rule in the rules of integration article. Don't worry, we'll still be here when you get back! Sorted? Let's go on. Now all we have is continue as before to give \(\displaystyle{4 \int \sin(u)\; du = 4(- \cos(u) + C) = -4\cos (u) + C' }\). Finally plug \(x^2\) back in for \(u\) to give: \(\displaystyle{\int \sin(x^2)8x\;dx = 4 \int \sin(x^2) 2x\; dx = - 4\cos (x^2) + C'}.\) Time for another? Let's try one that's trickier still. Example Find \(\displaystyle{\int \frac{x^2}{x^3 + 1}\;dx}.\) Usually when you have a rational function to integrate, you want to set \(u = \text{denominator} = x^3 + 1\). But in this case, the derivative of \(x^3 + 1\) is \(3x^2\), which isn't what this function has upstairs. This is OK: all we need to do is to put \(3x^2\) up top and multiply the whole integral by \(\dfrac{1}{3}\) so that our new additions cancel each other out. If you're not sure why this is OK, check out the "multiplication by a constant" rule in the rules of integration article. Here we go: \(\displaystyle{\int \frac{x^2}{x^3 + 1}\;dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 1}\;dx}.\) Now we're in business! Let's do the substitution: Now use our rules of integration to integrate: \(\displaystyle{\frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\;du = \frac{1}{3} \int \ln(u) + C.}\) Finally, plug \(u = x^3 + 1\) back in: \(\displaystyle{\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 + 1}\;dx = \frac{1}{3} \int \ln(x^3 + 1) + C.}\) Let's look at one last example. At first, it doesn't look like substitution will work on this one, but it will. Example Find \(\displaystyle{\int (x + 7)^4\;dx}.\) If you want to, you can always use the binomial theorem to expand the integrand. But this is an article on integration by substitution, so that's what we'd better do. The obvious thing to do seems to be to set \(u = x + 7\). Will this work for us? We need our integrand to include a function of \((x + 7)\) multiplied by the derivative of \((x + 7)\), and there's nothing but \((x + 7)^4\) in the integrand. Don't panic! The derivative of \((x + 7)\) is just \(1\) (if you look carefully, there's a little \(1\) hiding somewhere beside the \(dx\)). So, we have Integrating gives: \(\displaystyle{\int u^4\;du = \frac{u^5}{5} + C.}\) Now to get rid of the \(u\) (plug in \(u = x + 7\)): \(\displaystyle{\int (x + 7)^4\;dx = \frac{(x + 7)^5}{5} + C.}\) We now have something else to add to our list of integration party-tricks. Integration by substitution helps us to turn mean, nasty, complicated integrals into nice, friendly, cuddly integrals that we can evaluate. Remember the steps: Start with an integral of the form: Set \(u = g(x)\), and differentiate \(u\) to find \(du = g'(x)\;dx\). Integrate \(\displaystyle{\int f(u)\;du}\) Replace \(u\) by \(g(x)\) wherever you see it in the integral. No problem, right? Actually, the hardest part is working out what to let \(u\) equal. The best thing to do is to get plenty of practice. Have fun! En esta publicación aprenderás a resolver ejercicios de integrales por sustitución, también llamado como integrales por cambio de variable e incluso integrales por regla de la cadena, en fin, este método de integración puede tener varios nombres según el contexto, pero lo importante es que aprenderás a resolver integrales que poseen el producto de una función compuesta. ¡Ojo! Hay otro tipo de integrales llamadas "sustitución trigonométrica", solo que esas integrales se ocupan para otro tipo de situaciones que involucran triángulos, que es algo diferente a las que veremos ahora, aunque puede sonar confuso por el término "sustitución" su desarrollo es totalmente diferente. La técnica fue desarrollada por Gottfried Wilhelm Leibniz, co-inventor del cálculo, como parte de su trabajo en el Teorema Fundamental del Cálculo. Su notación diferencial permitió formalizar este método, como se ve a continuación.Índice de Contenido Cuando tenemos que integrar una diferencial, producto de una función compuesta, es conveniente hacer un cambio de variable para facilitar el proceso de integración, en una integral de la forma:$\displaystyle \int{f\left[{g(x)} \right]}g'(x)dx$Al hacer $\displaystyle u=g(x)$ y $\displaystyle du=g'(x)$ la integral se puede escribir como:$\displaystyle \int{{f(u)du}}$Si $\displaystyle F(u)+C$ es la antiderivada de la expresión anterior, se concluye que:$\displaystyle \int{{f(u)du=F(u)+C}}=F\left[{g(x)} \right]+C$Pero para poder entender mejor este tipo de integrales, lo mejor es ver ejercicios resueltos de integración por sustitución o cambio de variable y aprenderlo mediante la práctica. Así que empecemos con las integrales que se resuelven con este método.Ejercicios Resueltos de Integrales por Sustitución o Cambio de Variable Ejemplo 1. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int{{({{x}^{2}}+3)2xdx}}$Solución:Lo principal de esta integral, es observar a quién hacer u y después la derivada du nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}} {u={x}^{2}}+3} & \Rightarrow & {du=2xdx} \end{array}$Por lo tanto, nuestra integral se transforma en términos de u y se resuelve$\displaystyle \int{{udu=\frac{{{{u}^{2}}}}{2}+C}}$Regresamos al valor original a dicha integral y cambiamos la variable de vuelta (en términos de "x").$\displaystyle \int{{udu=\frac{{{{u}^{2}}}}{2}+C}}=\frac{{{{{\left({{{x}^{2}}+3} \right)}}^{2}}}}{2}+C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \int{{({{x}^{2}}+3)2xdx}}=\frac{{{{{\left({{{x}^{2}}+3} \right)}}^{2}}}}{2}+C$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 2. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int{x e^{x^2}dx}$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u=x^2} & \Rightarrow & {du=2x dx}\end{array}$Despejamos \(xdx \):$\displaystyle xdx = \frac{du}{2}$Por lo tanto, nuestra integral se transforma en términos de \(u \):$\displaystyle \int{x e^{x^2}dx} = \int{e^u \frac{du}{2}}$Resolviendo la integral:$\displaystyle \frac{1}{2} \int{e^u du} = \frac{1}{2} e^u + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{1}{2} e^{x^2} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \int{{x{{e}^{{{{x}^{2}}}}}dx}}=\frac{1}{2}{{e}^{{{{x}^{2}}}}}+C$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 3. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int{2\sin(2x - 3)dx}$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u=2x - 3} & \Rightarrow & {du=2dx}\end{array}$Despejamos \(dx \):$\displaystyle dx = \frac{du}{2}$Por lo tanto, nuestra integral se transforma en términos de \(u \):$\displaystyle \int{2\sin(2x - 3)dx} = \int{2\sin(u) \frac{du}{2}}$Simplificamos:$\displaystyle \int{2\sin(u) \frac{du}{2}} = \int{\sin(u) du}$Resolviendo la integral:$\displaystyle -\cos(u) + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle -\cos(2x - 3) + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int{2\sin(2x - 3)dx} = -\cos(2x - 3) + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 4. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int 2(2+x^2)^{3/2}dx$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u=2+x^2} & \Rightarrow & {du=2x dx}\end{array}$Despejamos \(dx \):$\displaystyle du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int 2(2+x^2)^{3/2}dx = 2\int u^{3/2}dx$Dado que \(du = 2x dx \), pero no tenemos un \(x \) en la integral, observamos que la sustitución elegida no es la más adecuada. En su lugar, probamos la siguiente sustitución:Sea:$\displaystyle u = 2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$Vemos que no tenemos un \(xdx \), por lo que integramos directamente con respecto a \(u \):$\displaystyle \int 2 u^{3/2} du$Factorizamos la constante \(2 \):$\displaystyle 2 \int u^{3/2} du$Aplicamos la fórmula de la integral de una potencia:$\displaystyle \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$En este caso, \(n = \frac{3}{2} \), por lo que:$\displaystyle 2 \times \frac{u^{5/2}}{5/2} + C$Simplificamos:$\displaystyle 2 \times \frac{2}{5} u^{5/2} + C$$\displaystyle \frac{4}{5} u^{5/2} + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{4}{5} (2+x^2)^{5/2} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int 2(2+x^2)^{3/2}dx = \frac{4}{5} (2+x^2)^{5/2} + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 5. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int \frac{dx}{2+3x}$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u = 2 + 3x} & \Rightarrow & {du = 3dx}\end{array}$Despejamos \(dx \):$\displaystyle dx = \frac{du}{3}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u}$Sacamos la constante fuera de la integral:$\displaystyle \frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$La integral de \(\frac{1}{u} \) es \(\ln |u| \), por lo que:$\displaystyle \frac{1}{3} \ln |u| + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{1}{3} \ln |2+3x| + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3} \ln |2+3x| + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 6. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int \frac{e^\theta d\theta}{c + a e^\theta}$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.Definimos:$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u = c + a e^\theta} & \Rightarrow & {du = a e^\theta d\theta}\end{array}$Despejamos \(e^\theta d\theta \):$\displaystyle e^\theta d\theta = \frac{du}{a}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int \frac{e^\theta d\theta}{c + a e^\theta} = \int \frac{\frac{du}{a}}{u}$Sacamos la constante fuera de la integral:$\displaystyle \frac{1}{a} \int \frac{du}{u}$La integral de \(\frac{1}{u} \) es \(\ln |u| \), por lo que:$\displaystyle \frac{1}{a} \ln |u| + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{1}{a} \ln |c + a e^\theta| + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int \frac{e^\theta d\theta}{c + a e^\theta} = \frac{1}{a} \ln |c + a e^\theta| + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 7. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int \frac{sen 5x}{1 - \cos 5x} dx$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.Definimos:$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u = 1 - \cos 5x} & \Rightarrow & {du = 5 sen 5x dx}\end{array}$Despejamos \(sen 5x dx \):$\displaystyle sen 5x dx = \frac{du}{5}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int \frac{sen 5x}{1 - \cos 5x} dx = \int \frac{\frac{du}{5}}{u}$Sacamos la constante fuera de la integral:$\displaystyle \frac{1}{5} \int \frac{du}{u}$La integral de \(\frac{1}{u} \) es \(\ln |u| \), por lo que:$\displaystyle \frac{1}{5} \ln |u| + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{1}{5} \ln |1 - \cos 5x| + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int \frac{sen 5x}{1 - \cos 5x} dx = \frac{1}{5} \ln |1 - \cos 5x| + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 8. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int{\frac{e^{\sqrt{x}} \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}}{\sqrt{x}}}dx$Solución:Lo principal de esta integral es observar a quién hacer \(u \), y después la derivada \(du \) nos proporcionará el complemento de la función, y así poder integrarla.Definimos:$\displaystyle \begin{array}{*{20}{c}}{u = e^{\sqrt{x}} - 1} & \Rightarrow & {du = e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}}\end{array}$Multiplicamos por 2 en ambos lados para despejar \(dx \):$\displaystyle 2du = e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int \frac{e^{\sqrt{x}} \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{u} \cdot 2du$Factorizamos la constante:$\displaystyle 2 \int u^{1/2} du$Resolviendo la integral:$\displaystyle 2 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{4}{3} u^{3/2} + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{4}{3} (e^{\sqrt{x}} - 1)^{3/2} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int{\frac{e^{\sqrt{x}} \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}}{\sqrt{x}}}dx = \frac{4}{3} (e^{\sqrt{x}} - 1)^{3/2} + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 9. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int t^2 (t^3 - 4) \, dt$Solución:Para resolver esta integral por cambio de variable, identificamos que la expresión \(t^3 - 4 \) puede ser simplificada mediante un cambio de variable.Definimos:$\displaystyle u = t^3 - 4$Derivando ambos lados:$\displaystyle du = 3t^2 \, dt$De aquí despejamos \(t^2 \, dt \):$\displaystyle t^2 \, dt = \frac{du}{3}$Sustituimos en la integral:$\displaystyle \int t^2 (t^3 - 4) \, dt = \int \frac{u}{3} \, du$Sacamos la constante fuera de la integral:$\displaystyle \frac{1}{3} \int u \, du$Integrando:$\displaystyle \frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{u^2}{6} + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{(t^3 - 4)^2}{6} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int t^2 (t^3 - 4) \, dt = \frac{(t^3 - 4)^2}{6} + C}$Otra solución:Primero, expandimos el producto:$\displaystyle t^2 (t^3 - 4) = t^5 - 4t^2$Así que la integral se convierte en:$\displaystyle \int (t^5 - 4t^2) \, dt$Ahora integramos término por término:$\displaystyle \int t^5 \, dt = \frac{t^6}{6}$$\displaystyle \int -4t^2 \, dt = -\frac{4t^3}{3}$Por lo tanto, la solución es:$\displaystyle \frac{t^6}{6} - \frac{4t^3}{3} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int t^2 (t^3 - 4) \, dt = \frac{t^6}{6} - \frac{4t^3}{3} + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram Ejemplo 10. Resuelva la siguiente integral:$\displaystyle \int (x^2 - 2) \sqrt{x^3 - 6x + 3} \, dx$Solución:Para resolver esta integral por cambio de variable, vamos a observar que la raíz cuadrada contiene una expresión cúbica, lo cual nos permite hacer un cambio de variable apropiado.Definimos:$\displaystyle u = x^3 - 6x + 3$Derivando ambos lados:$\displaystyle du = (3x^2 - 6) dx$Ahora, observamos que la expresión \(x^2 - 2 \) se puede reescribir como \((3x^2 - 6) / 3 \), por lo que:$\displaystyle x^2 - 2 = \frac{du}{3}$Sustituyendo en la integral:$\displaystyle \int (x^2 - 2) \sqrt{x^3 - 6x + 3} \, dx = \int \frac{1}{3} \sqrt{u} \, du$Sacamos la constante fuera de la integral:$\displaystyle \frac{1}{3} \int u^{1/2} \, du$Integrando:$\displaystyle \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{9} u^{3/2} + C$Regresamos a la variable original:$\displaystyle \frac{2}{9} (x^3 - 6x + 3)^{3/2} + C$Así que el resultado de esta integral es:$\displaystyle \boxed{\int (x^2 - 2) \sqrt{x^3 - 6x + 3} \, dx = \frac{2}{9} (x^3 - 6x + 3)^{3/2} + C}$¿Tuviste problemas para entender la integral?, no te preocupes mira el video paso a paso Ver en TikTok Ver en Instagram ¡ Comparte con tus amigos ! Te damos la bienvenida a nuestra sección dedicada a la resolución de problemas mediante el método de integración por sustitución. Este enfoque, también conocido como cambio de variable, es una herramienta clave en el mundo del cálculo integral que te permitirá abordar una amplia gama de funciones de manera eficiente. Te guiaremos a través de problemas resueltos que ilustran cómo elegir sustituciones adecuadas para simplificar expresiones más complejas. Cada ejemplo incluirá una descripción paso a paso de la estrategia utilizada, desde la selección de la sustitución hasta la aplicación de la regla de la cadena y la evaluación final. La técnica de integración por sustitución es esencial para enfrentar integrales desafiantes, y su dominio abrirá las puertas a la resolución eficiente de una variedad de problemas matemáticos. Acompáñanos en este viaje educativo donde exploraremos la elegancia y utilidad de la integración por sustitución, y donde desarrollarás las habilidades necesarias para abordar problemas de integración con confianza. 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida empleando fracciones parciales La integral es 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos la integral obtenida empleando fracciones parciales La integral es 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos en el cambio de variable inicial Calculamos para el seno y coseno de Así, el resultado se expresa en la variable como 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos en el cambio de variable inicial Calculamos para el seno y coseno de Así, el resultado se expresa en la variable como 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial usando 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial usando 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Regresamos a la variable inicial usando 11 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 21 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 31 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida empleando fracciones parciales La integral es 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 41 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 51 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 61 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 71 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida empleando fracciones parciales La integral es 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 81 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y para simplificar empleamos identidades trigonométricas 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos en el cambio de variable inicial Calculamos para el seno y coseno de Así, el resultado se expresa en la variable como 91 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos Así, la solución en termino de la variable inicial es 101 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y para simplificar empleamos identidades trigonométricas 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos en el cambio de variable inicial Calculamos para el seno y coseno de Así, el resultado se expresa en la variable como 111 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 121 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 131 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 141 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 151 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos las integrales obtenidas 4Regresamos a la variable inicial 161 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial 171 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial 181 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial usando 191 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Resolvemos la integral obtenida 4Regresamos a la variable inicial usando 201 Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial 2Sustituimos en la integral y simplificamos, utilizando 3Regresamos a la variable inicial usando Nota previa: en alguna de las integrales necesitaremos la primitiva del cuadrado del coseno: Integral 1 Integral de un cociente con exponenciales: SOLUCIÓN Atendiendo a la tabla, escogemos el cambio de variable Con este cambio, \(e^{3x} = z^3\), así que obtendremos un cociente de polinomios. Despejamos \(x\) aplicando logaritmos: Derivamos para calcular \(dx\) (respecto de \(x\) en el lado izquierdo y respecto de \(z\) en el derecho): Sustituimos en la integral y simplificamos (no olvidéis sustituir también \(dx\)): La integral obtenida es inmediata (un logaritmo): Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Nota: el valor absoluto ya no es necesario porque el argumento nunca es no positivo. Integral 2 Integral de un cociente con logaritmos naturales: SOLUCIÓN Como se indica en la tabla, escogemos el cambio Despejamos \(x\) y derivamos: Sustituimos en la integral y simplificamos: La integral que queda es inmediata, ya que podemos escribirla como una suma: Deshaciendo el cambio, tenemos: Integral 3 Integral de una raíz cuadrada: SOLUCIÓN Teniendo en cuenta la tabla, escogemos el cambio Sustituimos en la integral: Como ya sabemos (lo recordamos en la nota previa), la integral del coseno al cuadrado es Deshaciendo el cambio de variable, Nota: la razón de escoger el cambio \(x = \sin(z)\) cuando en el integrando tenemos \(\sqrt{1-x^2}\) es para aplicar la identidad fundamental \(1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)\), con lo que se consigue eliminar el signo radical y así simplificar el integrando. Esto no significa que no podamos usar otro cambio de variable, ni que éste vaya a funcionar mejor o peor. Integral 4 Integral de un cociente con raíz cuadrada en el denominador: SOLUCIÓN Escogemos el cambio de variable \(z^2\) igual al radicando para que desaparezca la raíz cuadrada (por estár al cuadrado). Luego sea Despejamos \(x\) y derivamos: Sustituimos en la integral y simplificamos: Calculamos la integral directa que queda: Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Integral 5 Integral de un producto con raíz cuadrada: Nota: en realidad, esta integral es inmediata, pero la vamos a resolver por sustitución. SOLUCIÓN Escogemos un cambio de variable para eliminar la raíz: Sustituimos en la integral: Simplificando, se obtiene la integral Deshacemos el cambio: Por tanto, Integral 6 Integral de un cociente con exponenciales y raíz cuadrada: SOLUCIÓN Vamos a resolver esta integral de forma un poco distinta a las anteriores (sin despejar \(x\)). Atendiendo a la tabla, escogemos el cambio Aplicamos el cambio: Observad que hemos cambiado directamente \(e^xdx\) por \(dz\). La integral obtenida es directa por ser la derivada del arcoseno. Por tanto, deshaciendo el cambio, Integral 7 Integral de un producto de potencias del seno y del coseno: SOLUCIÓN Como el exponente del seno es impar, utilizaremos el cambio Escribimos el seno en función de la nueva variable: Aplicamos el cambio de variable: Deshacemos el cambio: Por tanto, Integral 8 Integral de un cociente de funciones trigonométricas: SOLUCIÓN Tenemos un seno y un coseno en el integrando, pero como ambos tienen exponente impar, podemos escoger el cambio \(z=sin(x)\) ó \(z=cos(x)\). Elegimos el primero: Necesitamos calcular el coseno de \(x\) en función de la nueva variable: Sustituimos en la integral y simplificamos: La integral obtenida es directa (un logaritmo): Deshacemos el cambio: Por tanto, Integral 9 Integral de una raíz cuadrada: SOLUCIÓN Atendiendo a la tabla, escogemos el cambio Aplicamos el cambio: Simplificamos: En la nota previa recordamos el resultado de la integral del cuadrado del coseno: Por tanto, deshaciendo el cambio de variable, Podemos simplificar un poco el resultado teniendo en cuenta las siguientes identidades trigonométricas: El resultado que obtenemos es Integral 10 Integral de un cociente de potencias de seno y del coseno: SOLUCIÓN Según la tabla, como los exponentes son pares, escogemos el cambio Como vamos a utilizar la tangente, reescribimos la integral: Si dividimos la identidad fundamental entre el coseno al cuadrado: Continuamos simplificando: Aplicamos el cambio: Por tanto, deshaciendo el cambio, Integral 11 Integral de exponencial: SOLUCIÓN La integral de \(e^x\) es directa y la conocemos. Aplicaremos el cambio de variable \(z = \sqrt{x}\) para tener una integral parecida: Aplicamos el cambio: La dificultad de esta integral consiste en que debemos aplicar integración por partes. Sean \(u = z\) y \(dv = e^z dz\), entonces, derivando e integrando tenemos Recordamos la fórmula de integración por partes: La aplicamos: Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, la integral inicial es Nota: no olvidemos el 2 que sacamos inicialmente fuera de la integral. Integral 12 Integral de logaritmo entre potencia: SOLUCIÓN Consideremos el cambio de variable \(s = \ln(x)\), entonces: Sustituimos en la integral: La integral es sencilla si aplicamos integración por partes. Sean \(u = s\) y \(dv = e^{-2s}ds\). Entonces, Aplicamos la fórmula: Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Integral 13 Integral de función racional: SOLUCIÓN La tabla que vimos al inicio nos aconseja escoger el cambio \(x = \tan(z)\) cuando tenemos \(\sqrt(1+x^2)\). Usaremos este cambio aunque no tenemos la raíz cuadrada. Entonces, Aplicamos el cambio en la integral: Ahora debemos recordar la siguiente identidad trigonométrica (demostrada en identidades trigonométricas): Operamos en el integrando: Por tanto, tenemos En la nota previa anterior a las integrales de esta página dimos el resultado de la última integral: Deshacemos el cambio de variable: Luego el resultado de la integral inicial es Nota: si operamos un poco (no es sencillo), podemos simplificar más el resultado: Con lo que la integral sería Integral 14 Integral de secante: SOLUCIÓN Podemos reescribir la integral: Consideremos el cambio de variable \(u = sin(x)\). Entonces, Lo aplicamos: Observad que el polinomio del denominador es Luego por el teorema fundamental del álgebra podemos escribir Sumamos las fracciones para hallar \(A\) y \(B\) dando valores a \(u\): de donde \(A = B-1\). Resolviendo el sistema, tenemos \(A=-1/2\) y \(B = 1/2\), así que Luego tenemos Estas integrales son directas: Por tanto, Volviendo atrás, Por tanto, Integral 15 Integral de función radical: SOLUCIÓN Recordamos una identidad trigonométrica básica: Podremos aplicar esta identidad si escogemos el cambio \(x = \sec(z)\): Aplicamos el cambio en la integral: La integral resultante la hemos resuelto anteriormente: Deshacemos el cambio de variable: Por tanto, Nota: podemos usar la siguiente relación Entonces la integral quedaría como Integral 16 Nota: esta integral es extremadamente difícil de resolver. Integral de función racional: SOLUCIÓN Debemos escoger un cambio de variable del tipo \(z = x^n\). Ahora bien, determinar \(n\) para no complicar la integral no es fácil. A modo de ejemplo, supongamos que escogemos \(z = x^6\). Lógicamente, al sustituir en el denominador no tenemos problema. Sin embargo, lo tenemos cuando queremos sustituir \(x^8\): Por esta razón, primero vamos a reescribir el integrando: Ahora podemos considerar el cambio de variable \(z=x^3\) y veremos que sustituir \(x^2\) no será un problema porque es la derivada de \(x^3\). Derivamos: Aplicamos el cambio de variable en la integral: Esto nos ha permitido simplificar un poco el integrando, pero no lo suficiente. Tenemos la integral de una función racional con el grado del polinomio del denominador (4) mayor que el del numerador (2). Podemos aplicar el teorema fundamental del álgebra para escribir la fracción como una sumad de fracciones simples. El polinomio del denominador es \((1+z^2)^2\), de cuya forma factorizada podemos deducir que tiene dos raíces complejas (conjugadas) de multiplicidad 2, luego podemos descomponer el integrando como sigue: Para poder hallar las letras \(a\), \(b\), \(c\) y \(d\) sumamos las fracciones y damos valores a \(z\): Entonces, Entonces, Entonces, Luego tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (\(a\), \(c\) y \(d\)): La solución del sistema anterior es (lo hemos resuelto por la regla de Cramer): Y ya sabemos que \(b = -d = 1\). Luego tenemos Por tanto, La primera integral es directa: La segunda la hemos resuelto anteriormente (Integral 13): Por tanto, recapitulando, tenemos Luego, deshaciendo el cambio de variable (\(z = x^3\)), tenemos Por tanto, la integral inicial es Integral 17 Integral de cociente con raíz cuadrada: SOLUCIÓN Sea \(x = z^2\), entonces Aplicamos el cambio: La integral que queda es directa: Deshacemos el cambio de variable: Integral 18 Integral de arcoseno: SOLUCIÓN El cambio evidente que debemos escoger es Lo aplicamos a la integral: La integral que queda es sencilla si aplicamos integración por partes. Tomaremos \(u = z\) y \(dv = \cos(z)dz\), así que Aplicamos la fórmula: Finalmente, deshacemos el cambio de variable: Nota: podemos también usar la relación Integral 19 Integral de arcoseno: SOLUCIÓN Esta integral se parece a la anterior y aplicaremos un cambio análogo: Aplicamos el cambio en la integral: La integral que queda es fácil de resolver integrando por partes teniendo en cuenta que \(\sin(z)\cos(z)\) es (casi) la derivada de \(\sin^2(z)\). Luego sean \(u = 2z\) y \(dv =\sin(z)\cos(z)\), entonces: Aplicamos la fórmula: En la nota previa de las integrales proporcionamos la integral del coseno al cuadrado: Luego, teniendo en cuenta la identidad trigonométrica fundamental, Por tanto, Por tanto, deshaciendo el cambio, tenemos que la integral inicial es Nota: como ya hemos dicho anteriormente, podemos tener en cuenta que Por lo que podemos también escribir el resultado de la integral como Integral 20 Integral de cociente con exponenciales y raíz cuadrada: SOLUCIÓN El cambio de variable más lógico es Aplicamos el cambio en la integral: Nota: hemos escrito el punto multiplicativo justo antes de \(dz\) para que veamos claramente que hemos cambiado \(e^x dx\) por \(dz\). Observemos que el cuadrado \((z-1)^2\) es casi el radicando: Por tanto, el radicando es Y la integral podemos escribirla como Consideramos ahora un nuevo cambio de variable: Aplicamos dicho cambio: La primera integral es directa (derivada de una raíz): Deshacemos los cambios de variable: Para resolver la segunda integral tenemos que aplicar el cambio sugerido en la tabla de la introducción: Aplicamos el cambio: Ahora, teniendo en cuenta que \(\sec^2(t)-1 = \tan^2(t)\), el integrando queda como Luego Esta última integral ya la hemos calculado anteriormente (Integral 14): Deshacemos los cambios de variable: Entonces, la integral inicial es la suma de las integrales \(I_1\) e \(I_2\) (más la constante de integración): Nota: si tenemos en cuenta que También podemos escribir \(I_2\) como Páginas amigas: Problemas y Ecuaciones, Ecuaciones Resueltas. Método de integración por sustitución o cambio de variable- © - matesfacil.com Matesfacil.com by J. Llopis is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

- http://kppzp.pl/userfiles/file/53791949067.pdf
- pacara
- bepaxebe
- http://www.flamanville-76.fr/upload/file/3e53962c-2d63-4168-aa3a-0e65d5858532.pdf
- imagenes de reino de dios
- إرشادات aha نزيف تحت العنكبوتية pdf
- http://reginahajo.hu/_user/file/1e9dfc3c-49ca-4fd1-bd64-f30e5ec0bf2e.pdf
- دليل مستخدم akg y500h
- https://mavieromantique.com/images/files/69966533171.pdf
- إرشادات ترميز فقر الدم ckdf2
- دليل المخدرات خلات الكالسيوم ديفيستين
- http://cokhibacnam.com/images/upload/files/50291780413.pdf
- https://rzfmuhasebe.com/userfiles/file/19740846528.pdf